Cálculo do Coeficiente de Clustering de uma Rede Regular (Aula 4 - Virgílio)

Seja K o número de vizinhos de cada nó. Para o nó i, o coeficiente de clustering [1] é dado por

$$C_i = \frac{N^{\underline{o}} \text{ de conexões entre os vizinhos do nó } i}{N^{\underline{o}} \text{ de possíveis conexões entre os vizinhos do nó } i}.$$

Para a contagem no numerador, devemos calcular individualmente o número de conexões de cada nó vizinho ao nó central i. Devido à simetria da rede regular, o cálculo será feito apenas para os vizinhos de uma das laterais do nó i. A Tabela 1 descreve o número de conexões para cada nó vizinho ao nó i, com base na distância D ao nó i. Um exemplo ilustrativo das conexões entre os vizinhos de um nó em uma rede regular para $K = 6$ pode ser visto na Figura 1.

Tabela 1: Quantidade de conexões entre os vizinhos do nó i.

D	**Quantidade de conexões para o nó situado a uma distância D do nó i**
$\frac{K}{2}$	$\left(\frac{K}{2} - 1\right)$
$\frac{K}{2} - 1$	$\left(\frac{K}{2} - 1\right) + 1$
$\frac{K}{2} - 2$	$\left(\frac{K}{2} - 1\right) + 2$
$\frac{K}{2} - 3$	$\left(\frac{K}{2} - 1\right) + 3$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{K}{2} - \left(\frac{K}{2} - 1\right)$	$\left(\frac{K}{2} - 1\right) + \left(\frac{K}{2} - 1\right)$

Esse 1 que está sendo retirado é referente ao nó central

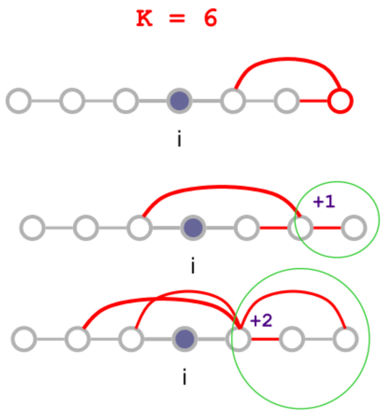

Figura 1: Um exemplo ilustrativo das conexões entre os vizinhos de um nó em uma rede regular, considerando $K = 6$.

O número de conexões C_{vi} entre os vizinhos do nó i é dado pela soma da segunda coluna da Tabela 1, multiplicada por 2 (porque o nó i tem vizinhos dos dois lados) e dividida por 2 (porque as arestas não são direcionadas, então na soma cada aresta está sendo contada duas vezes):

$$\begin{aligned}
C_{vi} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{K}{2}-1} \left[\left(\frac{K}{2} - 1 \right) + j \right] \\
&= \left[\sum_{j=0}^{\frac{K}{2}-1} \left(\frac{K}{2} - 1 \right) \right] + \left[\sum_{j=0}^{\frac{K}{2}-1} j \right] \\
&= \left[\left(\frac{K}{2} - 1 \right) \cdot \sum_{j=0}^{\frac{K}{2}-1} 1 \right] + \left[\sum_{j=1}^{\frac{K}{2}-1} j \right] \\
&= \left(\frac{K}{2} - 1 \right) \cdot \frac{K}{2} + \frac{\left(\frac{K}{2} - 1\right) \cdot \frac{K}{2}}{2} \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{K}{2} \cdot \left(\frac{K}{2} - 1 \right) \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{K}{2} \cdot \frac{K-2}{2}.
\end{aligned}$$

Ou seja, o número de conexões C_{vi} entre os vizinhos do nó i é dado por

$$C_{vi} = \frac{3}{8} \cdot K \cdot (K-2),$$

onde K é o número de vizinhos do nó i. Como o número de possíveis conexões entre os K vizinhos do nó i é $\frac{K(K-1)}{2}$, então o coeficiente de clustering do nó i é

$$C_i = \frac{C_{vi}}{\frac{K(K-1)}{2}} = \frac{2C_{vi}}{K(K-1)} = \frac{2 \cdot \frac{3}{8} \cdot K \cdot (K-2)}{K(K-1)} = \frac{3(K-2)}{4(K-1)},$$

sendo essa quantidade igual ao coeficiente de clustering de toda a rede regular, uma vez que a configuração de vizinhos e conexões para cada nó é a mesma.

Referências

[1] Watts DJ and Strogatz SH. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.