

**ANÁLISE ITERATIVA DOS PROBLEMAS DE P-CENTROS E P-MEDIANAS  
PARA UM CRESCENTE NÚMERO DE FACILIDADES:  
ESTUDO DE CASO NA EPIDEMIA DE DENGUE, SALVADOR, 1995.**

*Rodolfo Ranck Junior*<sup>1</sup>, *Leonardo Bacelar Lima Santos*<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), São José dos Campos, Brasil, {rodolfo@ranck1, santos@l2}@gmail.com

<sup>1</sup> Bolsista do CNPq – Brasil, <sup>2</sup> Bolsista da FAPESP – Brasil.

**Resumo:** Este artigo apresenta um meio de suporte à decisão para, dada uma tolerância de distância total  $\epsilon$  e/ou máxima entre focos da doença e facilidades, determinar o número mínimo de facilidades a serem instaladas, o que representa um melhor uso da verba pública com um melhor atendimento à população.

**Palavras Chave:** Problemas de Localização, Otimização Combinatória, Dengue.

## 1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se a seguir uma breve descrição sobre problemas de localização com ênfase nos problemas de p-centros e p-medianas; bem como uma síntese de trabalhos já publicados em temas correlatos.

### 1.1. Problemas de Localização

Problemas de localização tratam, no contexto aqui apresentado, de como lidar com as decisões sobre onde localizar facilidades em uma rede na qual existam pontos de demanda que precisam ser atendidos de acordo com um objetivo específico a ser otimizado [1]; dentre tal classe de problemas destaca-se os do tipo p-centros e p-medianas [2].

Os modelos de p-medianas têm como objetivo minimizar a soma dos custos de distribuição entre facilidades (instalações que fornecem um serviço) e pontos de demanda (que precisam ser atendidos pelas facilidades). Esses custos podem ser dados, por exemplo, em função da distância entre facilidades e pontos de demanda. Desse modelo básico, muitas variações podem ser consideradas, como, por exemplo, a capacidade máxima de atendimento, ou o custo fixo na instalação de facilidades [3].

No caso em que as medianas são não capacitadas, o problema das p-medianas pode ser um modelado como um problema de programação linear inteira conforme (1-5).

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2 \dots m \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = f \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq x_{jj}, \quad i = 1, 2 \dots m; j = 1, 2 \dots n \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2 \dots m; j = 1, 2 \dots n \quad (5)$$

em que:

$d_{ij}$  é a distância entre os nós  $i$  e  $j$ ;

$x_{ij}$  é uma variável binária, com  $x_{ij} = 1$  se o nó  $j$  está alocado à mediana  $i$  ou  $x_{ij} = 0$  caso não esteja;  $x_{ii} = 1$  se o nó  $i$  é uma mediana e  $x_{ii} = 0$ , caso contrário;

$f$  é um número inteiro e positivo de facilidades que se deseja localizar. No caso desse modelo essas facilidades são as medianas;

$m$  e  $n$  são os números de pontos considerados no problema.

Na formulação anterior:

a função objetivo (1) minimiza a distância total entre os pontos de demanda e suas respectivas medianas; a restrição (2) impõe que todo ponto de demanda  $i$  deve estar alocado a uma única facilidade  $j$ ; a restrição (3) impõe que o número total de medianas seja  $f$ ; a restrição (4) impõe que um ponto de demanda  $i$  só pode estar alocado a um nó  $j$  se neste nó houver uma mediana; a restrição (5) impõe que as variáveis de decisão só podem assumir os valores 0 ou 1.

Os modelos de p-centros, também conhecidos como modelos minimax, têm o objetivo de alocar um número de facilidades de maneira a minimizar a máxima distância entre uma facilidade e um ponto de demanda. Uma restrição é que toda a demanda deve ser atendida. Esse modelo pode ser relevante, por exemplo, quando a distância de alocação entre um ponto de demanda e sua respectiva facilidade é crítica para a eficácia do atendimento desse ponto de demanda.

O problema de p-centros pode ser modelado como um problema de programação linear inteira conforme (6-7,3-5):

$$\text{Min } z = d \text{Max} \quad (6)$$

$$\text{s. a.} \quad d \text{Max} \geq x_{ij} d_{ij}, \quad i = 1, 2 \dots m; j = 1, 2 \dots n \quad (7)$$

e restrições (3-5)

em que:

$dMax$  é a maior distância de associação (entre um foco da doença e a respectiva facilidade a qual ela está alocada).

Na formulação anterior, a função objetivo (6) minimiza a maior distância de associação enquanto a restrição (7) impõe que a máxima distância de associação seja maior ou igual a todas as outras distâncias de associação.

Tanto o problema de p-medianas quanto o problema de p-centros, formulados como problemas de otimização, pertencem à classe dos NP-árduos. Problemas dessa classe são pelo menos tão difíceis, nos termos de complexidade algorítmica, quando qualquer outro problema da classe NP. Mais detalhes sobre complexidade podem ser encontrados em [4].

### **1.2. Problemas de Localização em Saúde Pública: trabalhos anteriores.**

A modelagem matemática e computacional de doenças, seja no nível intra [5] ou inter *host* [6], e a análise de dados [7] biológicos têm sido cada vez mais aplicados a contextos de saúde pública ou coletiva. A possibilidade de testes exaustivos *in silicio*, e a execução automática de tarefas complexas estão entre as razões mais importantes deste sucesso.

A dengue é uma doença aguda e febril extremamente complexa, cuja dinâmica de transmissão indireta (pelo mosquito *Aedes Aegypti*) representa um grave problema de saúde pública para os governos de vários países. A doença atinge anualmente cerca de 50 milhões de pessoas em mais de 60 países, com 21.000 vítimas [8].

Este trabalho visa apresentar uma ferramenta de suporte a decisão em saúde pública: um método para localização automática de facilidades utilizando como estudo de caso uma situação real de epidemia de dengue. Entre os exemplos de facilidades estão as unidades de informação e esclarecimento sobre o processo de transmissão da doença e controle de vetores, coleta de dados (primária ou secundária) e até armadilhas para vetores em qualquer das suas fases de vida. Os clientes (demanda) aqui serão tomados como os casos (georreferenciados) da epidemia de dengue ocorrida em 1995 em Salvador, Bahia, originalmente apresentados em [9].

Há na literatura vários exemplos e resultados teóricos para os problemas de alocação ótima, mesmo em saúde pública. Calvo e Marks, em [10] construíram um modelo de p-medianas para localizar instalações multi-nível de cuidados de saúde, incluindo hospitais e centros de acolhimento da comunidade local. O modelo procura minimizar a distância e custos para o utilizador e maximizar a procura e utilização. Em [11] foram introduzidas algumas novas medidas para a localização de ambulâncias e hospitais: a função custo foi estendida para incluir não apenas o vínculo primário entre facilidade e demanda, mas também a ligação entre o ponto de salvamento e o ponto de serviço final; os modelos para a localização simultânea de pontos de despacho de ambulâncias e hospitais foram enquadrados. Em [12], apresenta-se um algoritmo baseado

na metaheurística *scatter search* para resolver dois problemas de localização de poucas facilidades (no máximo 10). Em [13] as características especiais das situações de emergência de larga escala, tais como terremotos e ataques terroristas foram consideradas. Em [14], analisa-se as melhores localizações para se colocar os recursos de saúde para tratar pacientes que sofreram um coma diabético, na província de Burgos, Espanha.

No contexto nacional dois trabalhos merecem destaque:

Em [15] apresenta-se diversos modelos de localização com aplicação em saúde pública analisando a localização de serviços não emergenciais, de serviços de emergência e a localização de serviços hierarquicamente relacionados. Mostrou-se a aplicação de um modelo hierárquico para a localização de serviços de assistência materna e perinatal no Município do Rio de Janeiro, RJ (Brasil);

Em [16] apresenta-se uma proposta para a otimização no serviço de saúde no estado do Paraná com relação ao fluxo de pacientes dentro do estado e a regionalização (divisão) do estado obtendo novas configurações hierárquicas para o mesmo.

## **2. OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO**

Neste trabalho propomos uma ferramenta de análise e suporte a decisão para a localização de facilidades quando se deseja alocar o menor número de facilidades atendendo a um determinado conjunto de parâmetros de aspiração. Tais parâmetros podem ser entendidos como a tolerância do decisor para aceitar ou não soluções segundo algum critério. Consideramos dois critérios: da soma das distâncias entre os focos de doença e suas respectivas facilidades (distância total) e a maior distância entre um foco de doença e sua respectiva facilidade (distância máxima). Apresentamos também um cenário no qual não estão bem definidos tais critérios.

A ferramenta consiste em resolver instâncias de problemas de p-centros e p-medianas formulados como problemas de programação linear inteira conforme (1-5) e (6-7,3-5), respectivamente, utilizando um algoritmo de *branch and bound*.

Não encontramos na literatura médica ou matemática nenhum trabalho que promovesse a alocação ótima de um número arbitrário de instalações utilizando dados reais para a distribuição dos clientes no contexto de epidemias de transmissão indireta: este trabalho visa preencher tal lacuna da literatura.

O estudo de caso para aplicação da metodologia proposta em Dengue foi decidido devido à alta complexidade da doença e seu status de grave problema de saúde pública nacional. O Ministério da Saúde informou em 26 de fevereiro que o número de casos de dengue registrados no país neste ano, entre 01/01 e 13/02, somou 108,64 mil notificações, o que significa um crescimento de 109% em relação ao mesmo período do ano passado, quando foram detectados 51,87 mil casos no país. No mesmo dia do anúncio, a Secretaria de Estado da Saúde de São Paulo deu

início à Semana Estadual de Combate à Dengue, motivados pelo grande aumento do número de ocorrências no estado: o número absoluto de casos chega a 1.383, contra 323 em janeiro de 2009 [17].

### 3. BREVE FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir, apresenta-se uma breve introdução sobre os problemas de programação linear e sobre o método de solução de *branch and bound*.

#### 3.1. Programação Linear

Modelos de programação linear são modelos de programação matemática utilizados para representar problemas de otimização em que as restrições e a função objetivo são todas lineares. Esses modelos seguem uma estrutura comum que facilita a sua classificação e resolução por diferentes aplicativos computacionais.

No caso dos problemas de programação linear inteira, soluções normalmente são difíceis, ou até mesmo impossíveis de serem obtidas. Isso, pois devido à imposição de integralidade das variáveis de decisão, esses problemas são intrinsecamente combinatórios. Devido à dificuldade em determinar a envoltória convexa de problemas de programação linear inteira, uma grande quantidade de soluções normalmente precisa ser avaliada na busca por uma solução ótima. Para minimizar o esforço computacional uma possibilidade é avaliar o espaço de busca de maneira inteligente, descartando grupos de soluções que na melhor das hipóteses não podem ser melhor do que a melhor solução conhecida [18].

#### 3.2. Branch and bound

O *branch and bound* é um método de otimização combinatória de aplicação geral e pode ser classificado como uma técnica de enumeração implícita. Como o nome sugere, essa técnica é formada por dois procedimentos fundamentais: o *branching* e o *bounding*. O *branching* pode ser entendido como ramificação, ou a divisão do problema maior (ascendente) em subproblemas (descendentes); o *bounding* pode ser entendido como o processo de cálculo de limitantes objetivando a eliminação de um espaço de busca em que a solução ótima não se encontra [19].

Para que o *branching* possa ser realizado os subproblemas devem possuir as seguintes características:

- i) terem exclusividade mútua (a solução do problema ascendente deve contemplar um único resultado)
- ii) constituírem uma divisão exaustiva do problema ascendente (todos os subproblemas resolvidos até a otimalidade implicam na solução do problema original);
- iii) serem versões parcialmente resolvidas do problema ascendente;
- iv) serem menores que o problema ascendente.

A partir de um problema que pode ser iterativamente dividido respeitando as características (i-iv), no *branch and*

*bound*, tem-se uma árvore de subproblemas. Se essa árvore fosse completamente enumerada, todas as soluções possíveis para o problema inicial estariam nas folhas. Entretanto, no *branch and bound*, isso somente aconteceria em um pior caso. Esse método subdivide um problema quando necessário e descarta um ou mais ramos da árvore (diminuindo o espaço de busca) ao perceber que nenhuma solução neles pode ser a ótima [20].

No *branch and bound* não há especificado um padrão para realizar o *branching*. Uma alternativa é utilizar a técnica *jumptracking*, que implementa uma busca em largura na árvore. Essa técnica mantém os problemas ativos em uma lista ordenada segundo algum critério, por exemplo, o de menor limitante inferior. Uma desvantagem dessa técnica é o uso extenso da memória devido ao grande número de subproblemas ativos (subproblemas que foram avaliados e ainda não foram eliminados) armazenados na lista. Além disso, manter a lista desses problemas ordenada pode ser uma tarefa computacionalmente custosa. Outra alternativa é utilizar a técnica *backtracking*, que realiza uma busca em profundidade: a partir de um nó, um ramo é percorrido em direção ao fim da árvore, em seguida, retorna-se a este nó pelo mesmo caminho verificando os subproblemas. Essa técnica mantém poucos problemas ativos na lista, mas tem uma desvantagem de gerar soluções iniciais distantes da solução ótima em comparação com o *jumptracking* e, por isso, necessita realizar mais ramificações na árvore para que a solução ótima do problema inicial seja encontrada.

Um algoritmo de *branch and bound* tem sucesso se a solução ótima (ou até mesmo uma boa solução) do problema é encontrada em poucas avaliações de subproblemas. Por isso, a escolha de boas estratégias de busca e eliminação (geração de bons limitantes) pode ser determinante para esse sucesso [19, 20].

## 4. METODOLOGIA

A seguir apresentam-se uma descrição algorítmica da ferramenta proposta, o banco de dados, os recursos utilizados nos testes computacionais.

#### 4.1. Procedimento de solução da ferramenta proposta

A seguir apresenta-se um procedimento para alocar um número mínimo de facilidades objetivando satisfazer os critérios de aspiração para distância máxima e distância total entre os focos de doença e as facilidades.

1. Formule dois problemas (1-5) e (6-7,3-5), em que os pontos foco de doença são os pontos de demanda;
2. Estabeleça um número máximo de facilidades ( $maxF$ ) e dois critérios de aspiração: um para a distância total ( $ADT$ ) e outro para a distância máxima ( $ADM$ );
3. Faça  $f = 1$ ;
4. Se  $f > maxF$  vá ao passo 8;

5. Resolva os problemas (1-5) e (6-7,3-5);
6. Obtenha as distâncias máxima ( $dMax$ ) e total ( $dTotal$ ) a partir da solução dos problemas (1-5) e (6-7,3-5) e armazene-as respectivamente nas estruturas de dados  $ePPM$  e  $ePPC$ , inicialmente vazias, junto ao valor  $f$  correspondente;
7. Incremente  $f$  em uma unidade e volte ao Passo 4;
8. Procure na estrutura de dados  $ePPC$  e  $ePPM$  o subconjunto de soluções que satisfaça aos parâmetros de aspiração ( $S$ ), isso é, tal que  $dTotal \leq ADM$  e  $dMax \leq ADM$ ;
9. Se o subconjunto  $S$  não for vazio, selecione no subconjunto  $S$  a solução com o menor número de facilidades.

A solução eventualmente obtida no Passo 9 corresponde a uma solução factível e com um mínimo de facilidades. Se não houver solução em  $S$ , então pode ser que os parâmetros de aspiração não estejam bem definidos pelo decisor. Nesse caso, ele, eventualmente, pode estar interessado em analisar outras possibilidades do conjunto de soluções em  $ePPC$  e  $ePPM$  obtido no Passo 6. Na Seção 5 em discussões (ver Cenário 3) apresenta-se uma sugestão de um método para obter automaticamente uma solução para esses casos.

Aliado ao procedimento anterior, mais sistêmico, no caso em que os parâmetros de aspiração não estejam bem definidos, o decisor pode estar interessado na visualização de uma tabela ou de um gráfico com os dados contidos em  $ePPC$  e  $ePPM$ , o que pode ser determinante para a escolha de uma boa solução.

Na Seção 5, na parte de discussões, avaliam-se diferentes cenários práticos em que o problema pode surgir. As descrições apresentadas nessa Seção complementam o procedimento aqui descrito.

#### 4.2. Banco de Dados

Salvador, capital do estado da Bahia, nordeste do Brasil, está localizada a  $12^{\circ}55'34''$  de latitude sul e  $38^{\circ}31'12''$  de longitude oeste. Possui área geográfica de  $313 \text{ km}^2$ , e em 1995 tinha cerca de 2.300.000 habitantes. Das 15.458 notificações de dengue registrados pela SESAB (Departamento de Saúde do Estado da Bahia), em 1995, na região metropolitana de Salvador, foram georreferenciados, em coordenadas UTM, (Sistema Universal Transverso de Mercator) um total de 10.831 [9]. Os dados são apresentados semanalmente, correspondendo ao acumulado semanal da semana 1 a 53 (iniciando em 1º de janeiro e terminando em 31 de dezembro).

#### 4.3 Testes Computacionais

Para gerar os resultados computacionais da Seção 5 resolveram-se até a otimalidade os problemas p-centro e p-medianas separadamente variando o número de facilidades de 1 até o número máximo de pontos do problema. Além das informações de distância total e máxima, obtiveram-se as informações de localização e o tempo computacional em cada caso.

Do banco de dados descrito na Seção 4.2, utilizou-se a semana 33, que apresenta 73 casos de dengue.

Por simplicidade e devido o nível de abstração da informação em nosso banco de dados assumimos as seguintes condições:

- i) as demandas de um foco da doença por uma facilidade são iguais (por isso basta considerar apenas a distância entre eles);
- ii) as facilidades não são capacitadas;
- iii) uma facilidade deve ser alocada em um dos pontos focos de doença.

#### 4.4. Recursos Computacionais

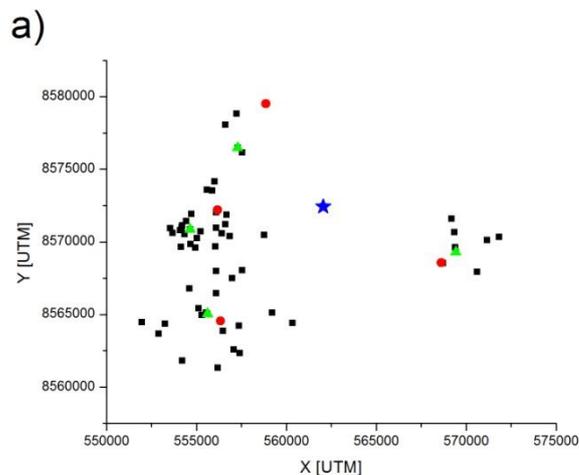
O código computacional utilizado na implementação deste trabalho foi escrito em linguagem C++ e executado em um computador com processador Intel Celeron M, 1,73 Ghz com 2GB de memória RAM do tipo DDR2. O compilador utilizado foi o Microsoft Visual C++ 2008 Express Edition. O Sistema Operacional utilizado foi o Microsoft Windows 7. Todos os problemas de programação linear deste trabalho foram resolvidos com a ajuda do programa CPLEX versão 11 da ILOG. (CPLEX, 2007).

### 5- RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir, apresentam-se os resultados computacionais divididos em duas partes: localização de facilidades; e análise para numero crescente de facilidades.

#### a) Localização de Facilidades

Na Figura 1 apresenta-se o mapa da localização ótima das facilidades para dois problemas com 5 e 20 facilidades respectivamente, em que os pontos representados na forma de quadrado são os clientes, os de forma triangular são as medianas, os de forma circular são os centros e as estrelas representam os pontos simultaneamente escolhidos como centro e mediana.



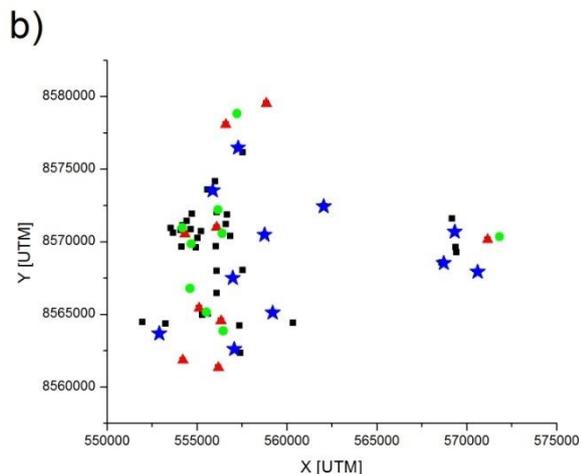


Figura 1. Localização ótima de facilidades com p-centros e p-medianas para p=5 (a) e p=20 (b). Em quadrados pretos a localização dos clientes, em círculos vermelhos os centros, em triângulos verdes as medianas, e em estrelas azuis os pontos que foram escolhidos simultaneamente para centros e medianas.

**b) Análise para numero crescente de facilidades**

Com as informações de distância máxima e de distância total para cada resultado, gerou-se o gráfico da Figura 2.

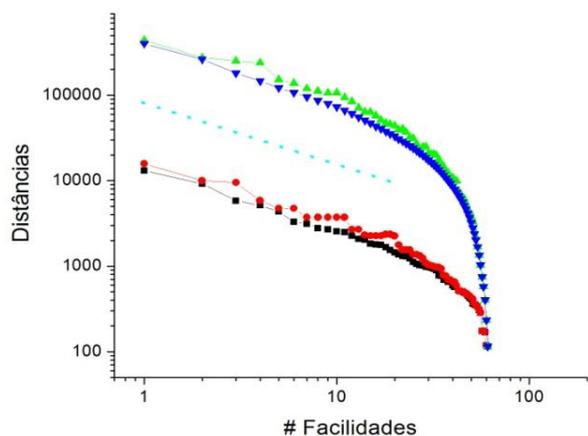


Figura 2. Decaimento da distância total e máxima em função do número de facilidades para ambos problemas. Em quadrados pretos a distância máxima para o p-centros e em círculos vermelhos para o p-medianas. Em triângulos azuis voltados para baixo a distância total para o p-medianas e em triângulos verdes voltados para cima para o p-centros. Em tracejado ciano um segmento de inclinação 3/4 utilizado como guia de referência.

A Tabela 1 corresponde a uma amostra detalhada das soluções apresentadas na Figura 2 para 1, 5, 10, 20 e 50 facilidades incluindo o tempo computacional.

Tabela 1. Tempo de processamento e os valores de distância (máxima e total) para os problemas de p-medianas e p-centros considerando diferentes números de facilidades.

Tipo	Facilidades	Tempo (s)	Distância Máxima	Distância Total
Centro	1	13,681	13078,707	440815,144
	5	70,871	4381,559	152908,093
	10	36,317	2558,121	107248,118

	20	31,683	1454,939	44186,923
	50	32,167	572,464	10152,620
Mediana	1	2,308	15792,007	403092,145
	5	3,993	4761,798	122163,633
	10	3,650	3741,899	73004,883
	20	3,166	2261,249	33083,539
	50	3,104	427,411	3236,619

O decaimento de ambas as curvas (ver Figura 2) assemelha-se ao ritmo algébrico (lei de potência) com expoente da ordem de 3/4 (ver segmento de reta tracejado em ciano na Figura 2). Decaimentos em lei de potência são assinaturas de sistemas complexos (ver [6]). É perceptível também a presença de um comportamento similar ao efeito de tamanho finito (ver [21]) para as distribuições de muitas facilidades: uma vez que o número de facilidades tende ao número de pontos, a curva que no início se comportava algebricamente passa a apresentar “cauda pesada” até que os valores de distância máxima e total vão a zero.

Com relação ao tempo computacional (Tabela 2), observa-se o maior tempo gasto com o problema de p-centros na resolução do problema (1-5) do que do problema de p-medianas na resolução do modelo (6-7,3-5). Isso era esperado, uma vez que o modelo (6-7,3-5) é o modelo (1-5) incluindo uma variável e novas restrições. A Tabela 3 apresenta uma comparação entre o número de variáveis e de restrições dos modelos (1-5) e (6-7,3-5):

Tabela 2. Informações estatísticas do tempo computacional para os problemas de p-medianas e p-centros.

	Média	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão
PPC	34,132	13,681	96,689	15,202
PPM	2,893	1,450	3,993	0,707

Tabela 3. Número de variáveis e de restrições para os problemas de p-medianas e p-centros.

	Nº de variáveis	Nº de restrições
PPM	$n^2$	$2 + n + n^2$
PPC	$n^2 + 1$	$2 + n + 2n^2$

Em nossos testes, observamos que para o problema de p-medianas o tempo computacional é similar para todos os números de facilidades. Já para o caso de p-centros, o tempo tende a diminuir com o aumento do número de facilidades, obtendo seu menor valor quando o número de facilidades foi o maior, entretanto, observou-se que no caso de uma única facilidade, o tempo também foi pequeno, na ordem de 10% do valor mínimo. Para ambos os problemas o tempo computacional oscila de modo que não se pode garantir que a resolução de um problema com menos facilidades seja computacionalmente menos custoso do que quando o número de facilidades é maior e vice-versa. Uma explicação pode estar no modo como o software comercial (CPLEX) utilizado neste trabalho resolve os problemas: antes da aplicação de um método de solução, existe uma etapa de pré-solução com o objetivo de reduzir o tamanho do problema.

A Figura 3 ilustra o produto final da metodologia aqui proposta e testada. Nela apresentamos o valor de distância total em função do valor da distância máxima para ambos os problemas; cada ponto da curva representando um número de facilidades. Uma vez definidos os valores máximos aceitáveis de distância máxima e/ou distância total, o gestor terá que escolher qual o número de facilidades a localizar, possivelmente o mínimo, e qual problema de otimização é usado para determinar a localização de cada uma dessas facilidades.

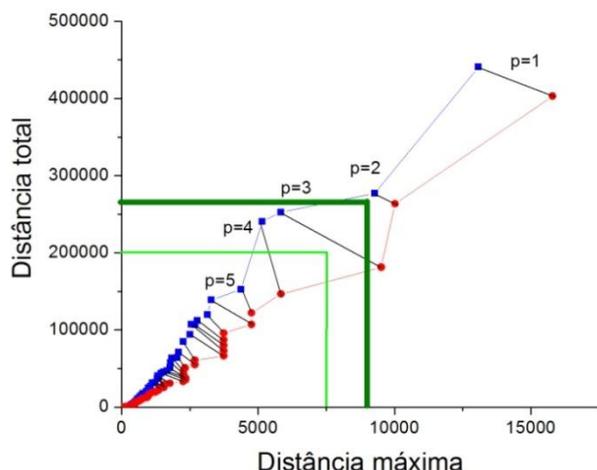


Figura 3. Distância total em função da distância máxima (espaço de fases) para diferentes números de facilidades. Em azul referentes ao problema dos p-centros, e em vermelho ao p-medianas.

Observando a Figura 3, considere os seguintes cenários:

### Cenário 1.

Distância máxima tolerada de 9000 UTM, e total tolerada de 265000 UTM (linhas mais grossas em verde-escuro na Figura 3). Neste caso, não há soluções que satisfazem os parâmetros de aspiração usando apenas uma ou duas facilidades, é preciso usar, no mínimo, três, e localizá-las segundo o p-centro, pois mesmo com 3 facilidades o p-medianas tem como resultado um par (máxima, total) que está fora da região aceitável (quadrado de lados dados pelos eixos coordenados e pelas linhas mais grossas verde-escuro da Figura 3)

### Cenário 2.

Distância máxima tolerada de 7500 UTM, e total tolerada de 200000 UTM (linhas mais finas em verde-claro na Figura 3). Neste caso, não há soluções que satisfazem os parâmetros de aspiração (que são mais exigentes que os do Cenário 1) usando apenas uma, duas ou três facilidades, é preciso usar quatro, e localizá-las segundo o p-medianas, pois mesmo com 4 facilidades o p-centro tem como resultado um par (máxima, total) que está fora da região aceitável (quadrado de lados dados pelos eixos coordenados e pelas linhas mais finas verde-claro da Figura 3).

### Cenário 3.

Para o caso dos parâmetros de aspiração não estarem bem definidos, o gestor pode observar qual o maior número

de facilidades que a sua verba pode arcar. A decisão, posterior, de qual problema de otimização resolver pode ser tomada com base no ângulo de inclinação do segmento de reta que une os pontos referentes às soluções do p-centro e p-medianas para o mesmo número de facilidades (linhas tracejadas na Figura 3): caso o ângulo de inclinação deste segmento de reta for inferior a  $45^\circ$  a sugestão é resolver o p-centro, caso seja superior sugere-se a resolução do p-medianas, e a escolha fica arbitrária para o caso de  $45^\circ$ .

Tal critério de sugestão é baseado nos seguintes fatos:

- i) quando não se tem parâmetros de aspiração estabelecidos deve-se considerar que a decisão seja a melhor para a maioria dos parâmetros que possam ser definidos: maioria dos retângulos, do 1º quadrante, com um vértice na origem da Figura 3;
- ii) considera-se que os valores dos critérios que venham a surgir sigam uma probabilidade uniformemente distribuída no conjunto de possíveis critérios;
- iii) os valores de ângulo de inclinação estarão sempre entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , uma vez que os valores alvo da otimização são sempre menores que os secundários, aqueles não incluídos na função objetivo, isto é: os valores de distância total e máxima para o p-centro e p-medianas respectivamente (esse fato pode ser observado na Figura 3 em que os quadrados azuis estão sempre acima e à esquerda dos respectivos círculos vermelhos).

Para ilustrar, considere um segmento de reta de inclinação fixa qualquer e com apenas uma de suas extremidades dentro do retângulo que delimita soluções factíveis. Se o ângulo de inclinação do segmento for menor de  $45^\circ$  há um maior número de retângulos que impossibilitam que tal extremidade seja a “mais abaixo e mais à direita” que retângulos que impossibilitem que seja a extremidade “mais acima e mais à esquerda”: a quantidade dos primeiros é proporcional ao cateto adjacente ao ângulo cuja tangente dá a inclinação - o cosseno de um ângulo maior de  $45^\circ$  é sempre maior que o seno do mesmo ângulo - o problema a ser sugerido para solução deve ser, portanto, o p-centro.

O mesmo raciocínio atesta a sugestão para o p-medianas no caso de um ângulo de inclinação maior que  $45^\circ$ .

## 6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

A metodologia aqui proposta permite:

- i) ao decisor determinar uma solução que satisfaça às suas aspirações, possivelmente aquela com um mínimo de facilidades. Mesmo no caso em que os valores de tolerância são desconhecidos ou confusos, permite ao decisor encontrar uma boa solução apenas informando o quanto está disposto a investir na construção de facilidades;

- ii) obter boas soluções de maneira automatizada com base apenas nos valores de tolerância para as distâncias máxima e total ou quantidade de facilidades desejada, não necessitando de informações de custo para os objetivos de interesse (distância máxima e distância total), que podem ser difíceis de serem determinadas pelo decisor, como seria o caso de uma abordagem em que ambos os objetivos compõem a mesma função custo;
- iii) escolher qual problema deve guiar a otimização, pois, para um mesmo número de facilidades, a solução de ambos os problemas (p-medianas e p-centros) podem estar na região de interesse, satisfazendo as aspirações do decisor.

Uma limitação na proposta deste artigo é a quantidade memória e o tempo de computação utilizado em função do número de clientes. Para trabalhos futuros, uma opção é buscar de bons limitantes para os problemas (1-5) e (6-7,3-5), obtidos através de relaxações objetivando acelerar a solução de métodos de solução como o *branch and bound* (ver Seção 3.2). Outra opção é o uso de heurísticas, por exemplo, meta-heurísticas que são capazes de obter boas soluções para problemas difíceis analisando apenas um pequeno subconjunto das suas possíveis soluções. Pretende-se trabalhar essas opções em trabalhos futuros além de continuar investindo na aplicabilidade da ferramenta proposta. Outra proposta para trabalhos futuros é realizar análises criteriosas de decaimento algébrico e efeito de tamanho finito para as curvas obtidas na Seção 5.

## AGRADECIMENTOS

Os autores do presente artigo agradecem os autores do artigo [9] onde o banco de dados referente à epidemia aqui estudada foi originalmente publicado.

## REFERÊNCIAS

- [1] Ranck Junior, R. “O Problema da Cobertura de Conjunto com Facilidades Alocadas a P-medianas”, Anais do XI SIGE - Simpósio de Aplicações Operacionais em Áreas de Defesa, pp. 266-269. São José dos Campos, 2009.
- [2] Hakimi, S.L. “Optimum location of switching centers and the absolute centers and the medians of a graph”, Operations Research, v. 12, pp. 450-459, 1964.
- [3] Lorena, L.; Senne, E. “Local search heuristics for capacitated p-median problems”, Networks and Spatial Economics. v.3, n.4, pp. 407-419, 2003.
- [4] Garey, M.R.; Johnson, D.S. “Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness”, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1979.
- [5] Reis, E., Santos, L. B. L., Pinho, S. “A cellular automata model for avascular solid tumor growth under the effect of therapy”, Physica. A., v.388, p.1303 - 1314, 2009.
- [6] Santos, L. B. L., Costa, M. C., Pinho, S. T. R., Andrade, R. F. S. ; Barreto, F. R., Teixeira, M. G., Barreto, M. L. “Periodic forcing in a three-level cellular automata model for a vector-transmitted disease”, Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics (Print), v. 80, p. 016102, 2009.
- [7] Massad, E. et al. “Scale-free network of a dengue epidemic”, Applied Mathematics and Computation. v. 195, Issue 2, 1, p. 376-381, February 2008.
- [8] World Health Organization. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs117/en/> accessed at July 5, 2008.
- [9] Barreto, F.R., Teixeira, M. G., Costa, M. C. N., Carvalho, M. S., and Barreto, M. L. doi:10.1186/1471-2458-8-51, BMC Public Health 8, 51, 2008.
- [10] Calvo, A. and Marks, H., “Location of health care facilities: An analytical approach. Socio-Economic Planning Sciences”, v.7, p. 407-422, 1973.
- [11] Berlin, G. N., ReVelle, C. S., Elzinga, D. J. “Determining ambulance - hospital locations for on-scene and hospital services”. Environment and Planning, v.8 p. 553-561. 1976.
- [12] Pacheco, A. J. and Casado, S. “Solving two location models with few facilities by using a hybrid heuristic: a real health resources case”, Computers & Operations Research. v. 32, Issue 12, p. 3075-3091, December 2005.
- [13] Jia, H., Ordóñez, F., Dessouky M. M., “A Modeling Framework for Facility Location of Medical Services for Large-Scale Emergencies”, Special Issue of IIE Transactions on Homeland Security, v.39, p.41-55, 2007.
- [14] Pacheco, J. A. et al. “Heuristic Solutions for Locating Health Resources”, IEEE Intelligent Systems, v. 23, n. 1, p. 57-63, 2008.
- [15] Galvão, R. D., Nobre, F.F., Vasconcellos, M. .M., “Mathematical location models applied in the spatial organization of health units”. Rev. Saúde Pública, v.33, n.4, p. 422-434,1999.
- [16] Scarpin, C. T., Steiner, M. T. A., Dias, G. J. C. “Técnicas da Pesquisa Operacional Aplicadas na Otimização do Fluxo de Pacientes do Sistema Único de Saúde do Estado do Paraná”. Anais do XXXVIII SBPO – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Anais. Goiânia (GO), Brasil, 2006.
- [17] Notícia disponível em: <<http://g1.globo.com>>, ultimo acesso em em 10/03/2010
- [18] Bazarra, M. et al. “Linear programming and network flows”. 2.ed. New York: John Wiley & Sons. p. 625, 1990
- [19] Narendra, K. F. “branch and bound algorithm for feature subset selection”. IEEE Transactions on Computers, v.26, n.9, p.917-922, 1977.
- [20] Mitten, L.G. “Branch and bound methods: general formulation and properties”, Operations Research, v.18, p.24–34, 1970.
- [20] ILOG CPLEX 11.0. “User’s Manual”. Ilog Inc., p.532. Paris, France, Ilog, 2007. Disponível em: <http://www.ilog.com>. Último acesso em: 12 Dez. 2008
- [21] Pinho, Suani T. R. “Modelo de Ising em redes aperiódicas e Criticalidade auto-organizada”. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1998.