APÊNDICE

ANÁLISE DOS RELACIONAMENTOS TOPOLÓGICOS

DESCRIÇÃO

Este apêndice contém a análise exaustiva aos relacionamentos topológicos descritos no texto principal do Capítulo 5. Iremos discutir os casos área-área, linha-linha, linha-área, ponto-área, ponto-linha e ponto-ponto. Nossas ferramentas de análise serão a matriz de 4-intersecções e a análise da intersecção dos conjuntos de pontos.

O que faz os relacionamentos topológicos diferir da teoria de conjuntos tradicional é o uso das noções de fronteira e interior.

RELACIONAMENTOS ÁREA-ÁREA

A tabela A.1 indica os 16 possíveis casos de relacionamento área-área, ilustrados na figura A.1. Estes relacionamentos foram agrupados em quatro conceitos: *disjoint, overlap, touch* e ***in*****.** Por simplicidade, não utilizamos (como faz Egenhofer) os conceito de "equal", "covers" e "covered by".

1. *DISJOINT* - duas áreas são disjuntas quando não tem pontos em comum.

   $A \textit{ disjoint } B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset.$

2. *IN* - uma área está contida em outra quando a intersecção dos dois conjuntos de pontos é a própria área.

   $A \textit{ in } B \Leftrightarrow (A \cap B = A).$

3. OVERLAP - duas área se sobrepõem quando seus interiores se tocam e a intersecção dos dois conjuntos não é nenhuma das duas áreas.

A *overlap* $B \Leftrightarrow (A^o \cap B^o \neq \emptyset) \wedge (A \cap B \neq A) \wedge (A \cap B \neq B)$.

4. TOUCH - duas áreas se tocam quando apenas suas fronteiras se interceptam.

A *touch* B $\Leftrightarrow$ $(A \cap B \neq \emptyset) \wedge (A^o \cap B^o = \emptyset)$.

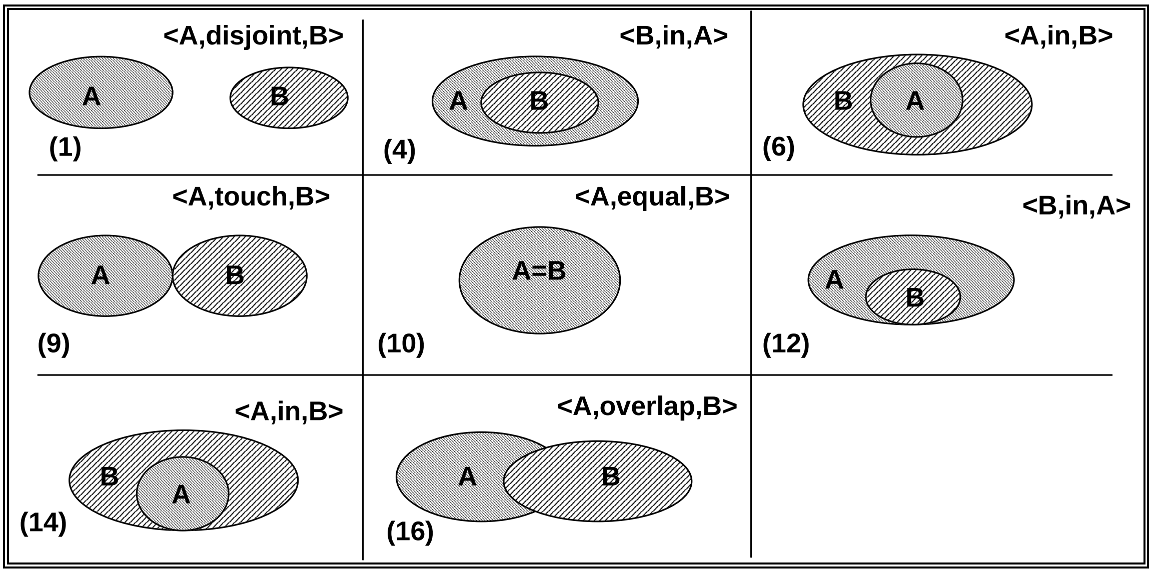

Figura A.1 - Relacionamentos área-área

TABELA A.1 - Relacionamentos área-área

caso	$\delta A \cap \delta B$	$\delta A \cap B^o$	$A^o \cap \delta B$	$A^o \cap B^o$	$A \cap B$	*visão intuitiva*
1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	A disjoint B
2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	-	-
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	-
4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	B	B in A
5	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	-
6	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	A	A in B
7	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	-
8	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	-	-
9	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	A touch B
10	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	A, B	A in B $\wedge$ B in A
11	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	-
12	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	B	B in A
13	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	-
14	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	A	A in B
15	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	-
16	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neq$A, $\neq$B	A overlap B

RELACIONAMENTOS LINHA-ÁREA

A tabela A.2 abaixo indica os 14 relacionamentos topológicos possíveis (segundo a matriz de 4-intersecções) entre uma linha e uma área. Estes relacionamentos foram condensados nos conceitos *disjoint, touch, cross* e *in.* Ocorrem três situações de ambiguidade entre os relacionamentos *cross e in*, resolvidas por intermédio do cálculo da intersecção entre os conjuntos de pontos. Estes relacionamentos estão ilustrados na figura A.2.

1. *L disjoint, A* - uma linha e uma área são disjuntas quando não tem pontos em comum.

   $L \textit{ disjoint } A \Leftrightarrow L \cap A = \emptyset.$

2. *L in A* - uma linha está contida em uma área quando seus interiores se tocam e a intersecção dos dois conjuntos de pontos é a própria linha.

   $L \textit{ in } A \Leftrightarrow (L^o \cap A^o = \neg\emptyset) \wedge (L \cap A = L).$

3. *L cross A* - uma linha cruza uma área quando seus interiores se tocam e a intersecção dos dois conjunto não é a própria linha (isto é, a linha está parcialmente fora da área).

   $L \textit{ cross } A \Leftrightarrow (L^o \cap A^o = \neg\emptyset) \wedge (L \cap A \neq L).$

4. *L touch A* - uma linha toca uma área quando a fronteira da área intercepta a fronteira (ou o interior) da linha e os interiores não se tocam.

$L, \textit{touch}, A \Leftrightarrow \{(\delta L \cap \delta A = \neg\emptyset) \vee (L^o \cap \delta A = \neg\emptyset)\} \wedge (L^o \cap A^o = \emptyset).$

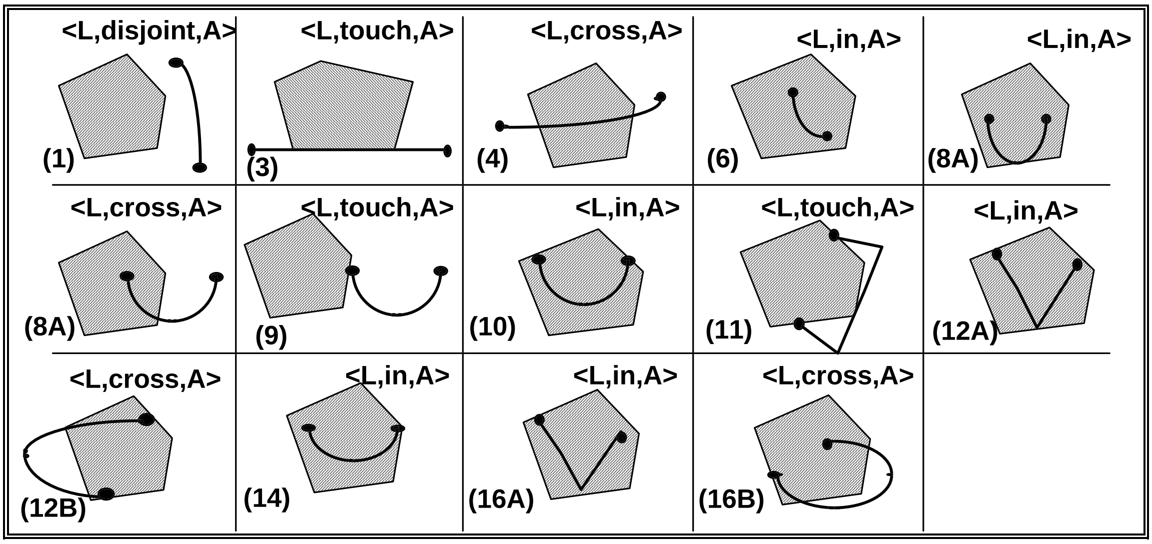

Figura A.2 - Relacionamentos possíveis linha-área

TABELA A.2 - RELACIONAMENTOS LINHA-ÁREA

caso	$\delta L \cap \delta A$	$\delta L \cap A^o$	$L^o \cap \delta A$	$L^o \cap A^o$	$L \cap A$	*relacionamento*
1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	*L disjoint A*
2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	-	-
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	-	*L touch A*
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	-	*L cross A*
5	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	-
6	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	-	*L in A*
7	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	-	-
8A	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	L	*L in A*
8B	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neq$L	*L cross A*
9	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	*L touch A*
10	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	-	*L in A*
11	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	-	*L touch A*
12A	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	L	*L in A*
12B	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neq$L	*L cross A*
13	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	-	-
14	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	$\neg\emptyset$	-	*L in A*
15	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\emptyset$	-	-
16A	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	L	*L in A*
16B	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neg\emptyset$	$\neq$L	*L cross A*

RELACIONAMENTOS LINHA-LINHA

A tabela A.3 abaixo indica os 24 relacionamentos topológicos possíveis (segundo a matriz de 4-intersecções) entre duas linhas, ilustrados na figura A.3. Para caracterizar melhor os relacionamentos e ambiguidades será preciso lançar mão da noção de dimensão da intersecção. Note-se que no caso de relações linha-linha, quatro tipos de relações são possíveis:

1. L_1 *disjoint* L_2- duas linhas são disjuntas quando não tem pontos em comum.

   $L_1 \textit{ disjoint } L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_2 = \varnothing.$

2. L_1 *cross* L_2 - duas linhas se cruzam quando seus interiores se tocam e sua intersecção define um conjunto de pontos de dimensão zero (isto é, um conjunto de pontos esparsos).

   $L_1 \textit{ cross } L_2 \Leftrightarrow L_1^o \cap L_2^o = \neg\varnothing \wedge \dim (L_1 \cap L_2) = 0.$

3. L_2 *overlap* L_1 - duas linhas se sobrepõem quando seus interiores se tocam e sua interseção define um conjunto de pontos de dimensão um (isto é, sua intersecção contém pelo menos uma linha).

   $L_2 \textit{ overlap } L_1 \Leftrightarrow (L_1^o \cap L_2^o = \neg\varnothing) \wedge (\dim (L_1 \cap L_2) = 1).$

4. L_1 *touch* L_2 - duas linhas se tocam quando a fronteira de uma linha intercepta a fronteira (ou o interior) da outra e os interiores não se tocam.

   $L_1 \textit{ touch } L_2 \Leftrightarrow (L_1 \cap L_2 = \neg\varnothing) \wedge (L_1^o \cap L_2^o = \varnothing).$

Note-se que incluímos na relação "overlap" os casos aonde uma linha está completamente contida em outra. Isto foi feito por tanto por tornar mais clara a formalização, como por corresponder a uma noção cognitiva; a noção de "inclusão" é mais evidente quando lidamos com dois conjuntos de pontos de dimensões distintas (e.g, linha em área).

TABELA A.3 - Relacionamentos linha-linha

caso	$\delta L_1 \cap \delta L_2$	$\delta L_1 \cap L_2^o$	$L_1^o \cap \delta L_2$	$L_1^o \cap L_2^o$	*dim*($L_1 \cap L_2$)	*relacionamento*
1	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	L_1 *disjoint* L_2
2A	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_1 *overlap* L_2
2B	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2
3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	L_2 *touch* L_1
4A	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_2 *overlap* L_1
4B	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2
5	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	L_1 *touch* L_2
6A	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_1 *overlap* L_2
6**B**	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	<L_1,*cross*, L_2>
7	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	-	<L_1,*touch*, L_2>
8A	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	<L_1,*overlap*, L_2>
8B	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	<L_1,*cross*, L_2>
9	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	<L_1,*touch*, L_2>
10A	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	<L_1,*overlap*, L_2>
10B	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2
11	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$		L_1 *touch* L_2
12A	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_1 *overlap* L_2
12B	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2
13	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	-	L_1 *touch* L_2
14A	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_1,*overlap* L_2
14B	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2
15	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\varnothing$		L_1 *touch*, L_2
16A	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	1	L_1 *overlap* L_2
16B	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	0	L_1 *cross* L_2

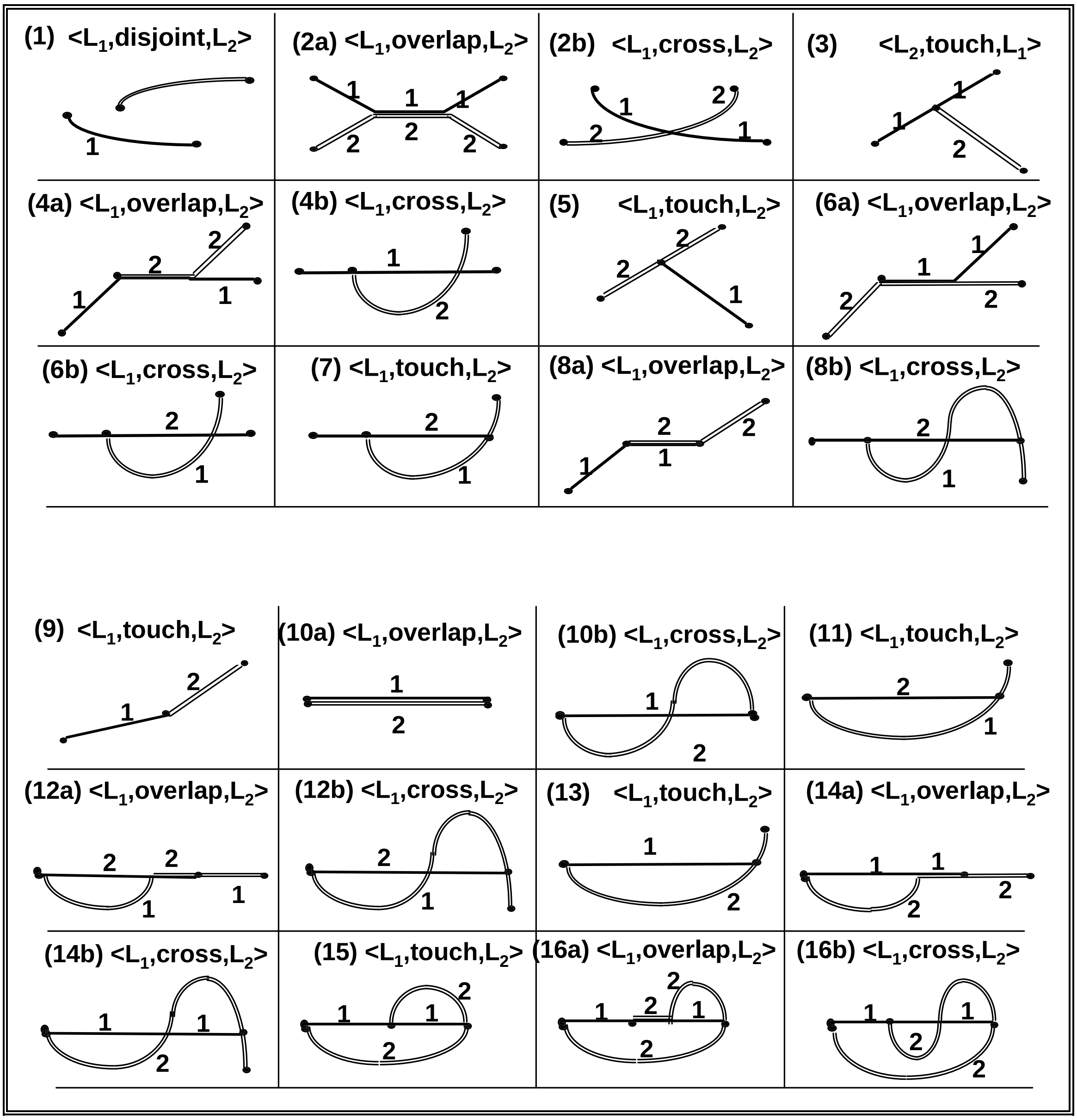

Figura A.3 - Relacionamentos linha-linha.

RELACIONAMENTOS PONTO-ÁREA

No caso de relacionamentos ponto-área, o número de casos a verificar é bastante restrito, pois a fronteira de um ponto é vazia. A tabela A.4 traz os 3 casos possíveis, ilustrados na figura A.4.

1. *P disjoint A* - um ponto e uma área são disjuntos quando sua intersecção é vazia.

   $P \textit{ disjoint } A \Leftrightarrow P \cap A = \varnothing.$

2. *P in A* - um ponto está dentro de uma área quando o ponto e o interior da área tem intersecção.

   $P \textit{ in } A \Leftrightarrow P^o \cap A^o = \neg\varnothing.$

3. *P touch A* - um ponto toca uma área quando o ponto intercepta a fronteira da área.

   $P \textit{ touch } A \Leftrightarrow P^o \cap \delta A = \neg\varnothing.$

Tabela A.4 - Relacionamentos ponto-área

caso	$P^o \cap \delta A$	$P^o \cap A^o$	*relacionamento*
1	$\varnothing$	$\varnothing$	*P disjoint A*
2	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	*P inside A*
3	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	*P touch A*
4	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	-

RELACIONAMENTOS PONTO-LINHA

Também neste caso, o universo a considerar é restrito, como mostra a tabela A.5.

1. *P disjoint* L - um ponto e uma linha são disjuntos quando sua intersecção é vazia.

   P *disjoint* $L \Leftrightarrow P \cap L = \varnothing$.

2. *P in* L - um ponto está dentro de uma linha quando o ponto e o interior da linha tem intersecção.

   P *in* $L \Leftrightarrow P^o \cap L^o = \neg\varnothing$.

3. *P touch* L - um ponto toca uma linha quando o ponto intercepta a fronteira da linha.

   P *touch* $L \Leftrightarrow P^o \cap \delta L = \neg\varnothing$.

Tabela A.5 - Relacionamentos ponto-linha

caso	$P^o \cap \delta L$	$P^o \cap L^o$	*relacionamento*
1	$\varnothing$	$\varnothing$	*P disjoint* L
2	$\varnothing$	$\neg\varnothing$	*P in* L
3	$\neg\varnothing$	$\varnothing$	*P touch* L
4	$\neg\varnothing$	$\neg\varnothing$	-

RELACIONAMENTOS PONTO-PONTO

No caso de dois pontos, deve-se considerar apenas a intersecção de seus interiores, como mostra a tabela 4.A. Adotamos o termo *"overlap"* em lugar de *"in"* por analogia ao caso de relacionamentos linha-linha.

1. P_1 *disjoint* P_2 - dois pontos são disjuntos quando não se interceptam.

   P_1 *disjoint* $P_2 \Leftrightarrow P_1 \cap P_2 = \emptyset$.

2. P_2 *overlap* P_1 - dois pontos se sobrepõem quando seus interiores se tocam.

   P_2 *overlap* $P_1 \Leftrightarrow (P_1^o \cap P_2^o = \neg\emptyset)$.

caso	$P_1^o \cap P_2^o$	*relacionamento*
1	$\emptyset$	P_1 *disjoint* P_2
2	$\neg\emptyset$	P_1 *overlap* P_2