

# **ANÁLISES SOBRE MODELOS DIGITAIS DE TERRENO EM AMBIENTE DE SISTEMAS DE INFORMAÇÕES GEOGRÁFICAS**

**Carlos Alberto Felgueiras  
carlos@dpi.inpe.br**

**Divisão de Processamento de Imagens - DPI  
Instituto de Pesquisas Espaciais - INPE**

## ***Abstract.***

This work describes the main analyses that can be performed from a Digital Terrain Model – DTM - represented by regular or irregular grids. Qualitative and quantitative analyses are addressed. This work shows, also, how the products derived from DTM analyses can be integrated with other data types in order to develop applications in a Geographical Information System – GIS - environment.

## **1. Introdução**

Um Modelo Digital de Terreno (**MDT**) representa o comportamento de um fenômeno que ocorre em uma região da superfície terrestre. Os dados de MDTs são de fundamental importância em aplicações de geoprocessamento desenvolvidas no ambiente de um Sistema de Informações Geográficas (**SIG**). Esses modelos são obtidos a partir de uma *amostragem do fenômeno* dentro da região de interesse. As amostras são processadas de forma a criar *modelos digitais* que vão representar a variabilidade do fenômeno nessa região. Os modelos digitais são utilizados por uma série de *procedimentos de análises* úteis para aplicações de geoprocessamento. A utilização dos modelos digitais, pelas análises, possibilita o estudo de um determinado fenômeno sem a necessidade de se trabalhar diretamente na região geográfica escolhida. As análises podem ser qualitativas ou quantitativas e são importantes para fins de simulações e tomadas de decisão no contexto de desenvolvimento de aplicações, ou modelagens, de geoprocessamento que utilizam SIGs.

Este trabalho apresenta uma visão geral dos processamentos de análises que devem fazer parte de um sistema de modelagem digital de terreno desenvolvido no ambiente de um SIG. O objetivo maior deste trabalho é descrever os principais procedimentos de análises que mais comumente são realizados sobre os modelos digitais de terreno. O texto inclui: aspectos teóricos e alguns detalhes de implementação computacional de cada procedimento de análise, exemplos de aplicação e ilustrações. Algumas definições importantes, para melhor compreensão do texto que segue, são apresentadas na seção 2. A seção 3 é dedicada a descrição das análises que podem ser desenvolvidas com os modelos digitais de terreno. A seção 4 apresenta as conclusões do trabalho.

## **2. Definições**

Os *sistemas de informações geográficas* são banco de dados georeferenciados que permitem a integração de dados: de sensoriamento remoto, temáticos, cadastrais, tabulares e de modelagem digital de terreno.

Como já citado na introdução deste trabalho, os *modelos digitais de terreno* representam a variabilidade de um atributo, ou fenômeno geográfico, que ocorre dentro de uma região geográfica de interesse. *Um sistema de modelagem digital de terreno* compreende: a aquisição de um conjunto de amostras representativas do fenômeno a ser estudado; a criação do modelo digital, propriamente dito e; a definição de uma série de processamentos de análises sobre os modelos com a finalidade de se extrair informações úteis à uma aplicação de geoprocessamento. O modelo propriamente dito é formado por estruturas de dados convenientes para processamentos digitais eficientes, e pela a pela definição de funções de ajustes. Estas determinam o comportamento da variável dentro dos elementos básicos do modelo.

As análises desenvolvidas sobre um modelo digital de terreno permitem: visualizar o modelos em projeção geométrica planar; gerar imagens de nível de cinza, imagens sombreadas e imagens temáticas; calcular volumes de aterro e corte; realizar análises de perfis sobre trajetórias predeterminadas e; gerar mapeamentos derivados tais como mapas de declividade e exposição, mapas de drenagem, mapas de curva de nível e mapas de visibilidade. Os produtos das análises podem, ainda, serem integrados com outros tipos de dados geográficos objetivando o desenvolvimento de diversas aplicações de geoprocessamento, tais como, planejamento urbano e rural, análises de aptidão agrícola, determinação de áreas de riscos, geração de relatórios de impacto ambiental e outros.

## **3. Análises sobre os modelos de grade**

### **3.1 Geração de Imagens de MDTs**

A partir de um MDT pode-se criar imagens em níveis de cinza e imagens sombreadas. Na sequência apresentam-se mais detalhes sobre estas análises.

#### **Imagem MDT em níveis de cinza**

A imagem MDT em níveis de cinza é gerada diretamente do mapeamento dos valores de cota do modelo para valores de nível de cinza. Supondo-se um mapeamento linear dos valores de cota do modelo para valores de níveis de cinza, quantização linear, pode-se calcular o valor do nível de cinza **NC<sub>i</sub>** em função da cota **Z<sub>i</sub>** pelo seguinte equacionamento:

$$NC_i = \{[(Z_i - Z_{min}) * 254] / (Z_{max} - Z_{min})\} + 1$$

Esse equacionamento é válido para uma imagem cujos níveis de cinza estão representados por 8 bits e mapeia os valores de cota do fenômeno representado para valores de 1 a 255 da imagem. O valor de nível de cinza igual

a 0 é usado em posições, na região definida para o modelo, para as quais um valor de cota não pode ser definido.

A figura 1(a) apresenta uma imagem em nível de cinza obtida a partir de um modelo digital de terreno. Essa imagem é muito útil para se obter uma percepção qualitativa global da variação do fenômeno representado.

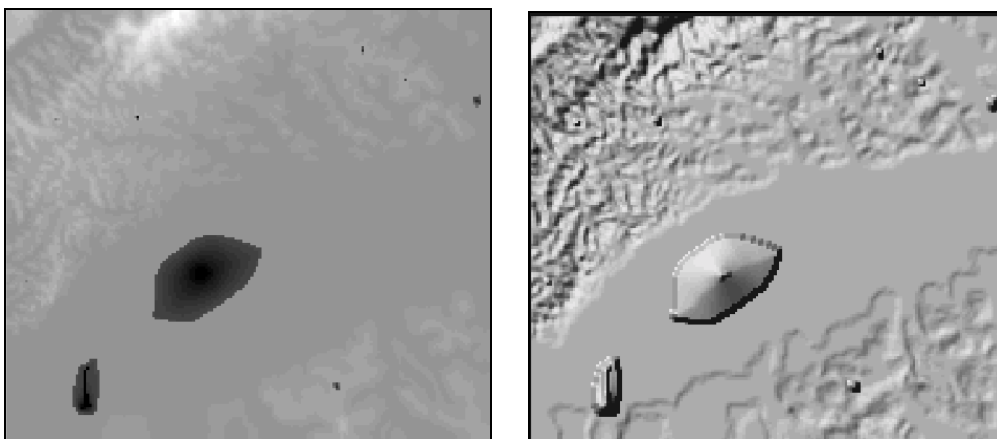
### Imagem de MDT sombreada

Uma imagem de MDT sombreada é obtida a partir do modelo e do posicionamento, em relação ao terreno, de uma de uma fonte de iluminação. Assim, para cada ponto do modelo pode-se determinar o vetor normal a superfície  $\mathbf{N}$  e o vetor de iluminação  $\mathbf{I}$  que parte do ponto da superfície e aponta para a fonte de iluminação. A partir desses dois valores pode-se calcular um valor de intensidade de iluminação utilizando-se, por exemplo, o seguinte modelo de iluminação de reflexão difusa:

$$NC_i = I_a + I_l * K_d * ( \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{L}_i ) = I_a + I_l * K_d * \cos \theta$$

Esse modelo estabelece que o nível de cinza da imagem sombreada  $NC_i$ , numa posição  $i$  da superfície, é igual a uma intensidade constante de iluminação ambiente  $I_a$  somado a uma componente de iluminação local. Essa componente local depende da intensidade da fonte luminosa  $I_l$ , de uma constante de reflexão difusa  $K_d$  e do ângulo  $\theta$  formado entre o vetor unitário normal  $\mathbf{N}$  e o vetor unitário de iluminação  $\mathbf{I}$  na posição  $i$  da superfície.

O modelo de reflexão difusa, ou modelo lambertiano, é um dos mais simples de se implementar computacionalmente. Outros modelos mais complexos podem ser utilizados quando se deseja um efeito de sombreamento mais realista. A imagem de MDT sombreada é muito útil como imagem de textura para compor uma projeção geométrica planar utilizando-se o modelo digital de terreno. A figura 1(b) mostra uma imagem sombreada gerada a partir de um modelo numérico de terreno.



(a)

(b)

Figura 1: Modelo de grade regular representado como: (a) uma imagem em nível de cinza e; (b) uma imagem sombreada

### 3.2 Visualização do modelo em projeção planar

O modelo de grade regular retangular é mais apropriado para efeitos de visualização do modelo em projeção geométrica planar. Os tipos de projeção planar mais utilizados, para MDTs, são os de *projeção paralela* e os de *projeção perspectiva*. Para a projeção geométrica planar paralela é necessário definir-se a direção de projeção, o azimute e a elevação. É comum definir-se, também, um fator de exagero vertical que será multiplicado pelos valores de cota do modelo para realçar, ou não, as áreas não homogêneas da superfície. Para projeção perspectiva deve-se fornecer, ainda, um centro de projeção que define o ponto de partida, ou de chegada, dos raios da projeção perspectiva. O modelo gerado pode ser visualizado em projeção planar com, ou sem, informação de textura.

#### Visualização do modelo sem inclusão de textura

Para se visualizar o modelo de grade retangular em projeção geométrica planar, sem inclusão de textura, deve-se considerar que os pontos da grade estão conectados, com os seus vizinhos, por segmentos de reta. Esses segmentos são projetados em um plano utilizando as equações de projeção paralela ou perspectiva. Além do cálculo dos valores projetados, o algoritmo de projeção geométrica planar deve conter um processamento de escondimento de linhas não visíveis que depende, basicamente, do tipo e da direção de projeção. Quando a projeção é perspectiva, o escondimento de linhas depende, também, da posição do observador em relação à superfície.

#### Visualização do modelo com inclusão de textura

Como já citado anteriormente, o modelo digital de terreno pode ser integrado com uma imagem durante processo de projeção geométrica planar. Em geral, a visualização do modelo projetado num plano, com inclusão de textura, é realizada através de técnicas de projeção planar conhecidas como “ray-tracing”. Esta técnica baseia-se no acompanhamento do traçado do raio desde o centro de projeção até ele alcançar elementos da superfície a ser projetada. Nesta técnica pode-se incluir efeitos de reflexão, difusa e especular, e de refração dos raios sobre os elementos da superfície.

Na projeção planar dos MDTs com textura utiliza-se a técnica de “ray-tracing” com textura externa. Neste processo o modelo é responsável pela definição da geometria da superfície projetada enquanto que a imagem é usada como dado de textura. A imagem de textura pode ser uma imagem de sensoriamento remoto, de satélite ou de aerolevanteamento por exemplo, ou uma imagem artificial como a imagem sombreada gerada sobre o próprio modelo que esta sendo projetado no plano. Através da técnica de “ray-tracing” com textura externa é possível sintetizar cenas com alto grau de realismo. A figura 2 mostra a projeção geométrica planar de um modelo com uma imagem sombreada dessa superfície.

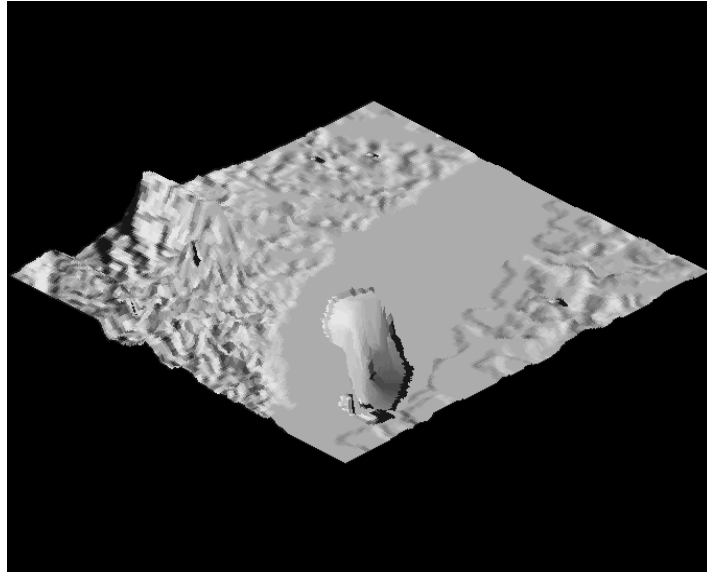


Figura 2: Visualização do modelo em projeção planar com textura obtida de uma imagem de MDT sombreada

### 3.3 Geração de Mapas de Contorno

Linhas de contorno são curvas que conectam pontos da superfície com mesmo valor de elevação. As linhas de contorno podem ser determinadas a partir de interseções da superfície com planos horizontais. A projeção dessas interseções, no plano  $xy$ , definem as curvas de contorno. Partindo-se do pressuposto que a superfície representada é uma função matemática definida no espaço  $xy$  então as linhas de contorno apresentam uma propriedade importante de nunca se cruzarem.

As linhas de contornos são obtidas a partir de intercessões com as arestas dos elementos básicos, triângulo ou retângulo, do modelo. A figura 3 ilustra o processo de obtenção de uma linha de contorno a partir do modelo.

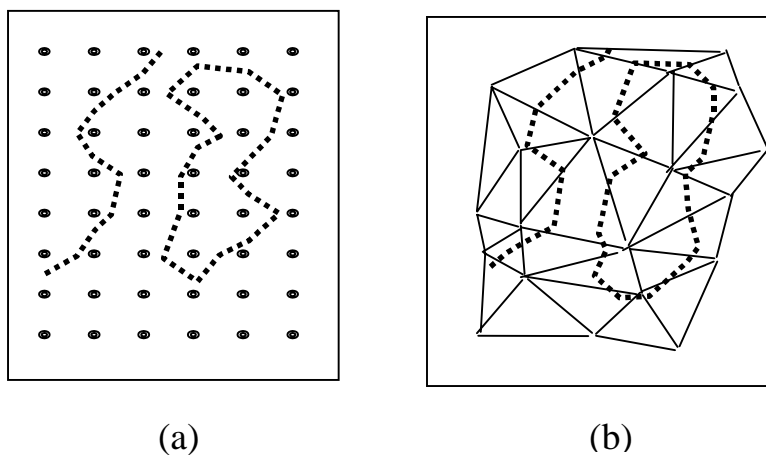


Figura 3: Curvas de contorno a partir do MNT no formato de grade (a) retangular e (b) triangular

Existem, basicamente, 2 métodos de geração de mapas de contornos a partir do modelo de grade: o método seguidor de linhas e o método de segmentos.

O *método seguidor de linhas* é um método que gera cada linha de contorno em um único passo. Por esse método procura-se um segmento que pertence a uma curva de contorno. Os pontos extremos desse segmento são definidos como extremos da linha de contorno. Em seguida busca-se os outros segmentos que tem ligações com essas extremidades. Os novos segmentos encontrados são incorporados a linha e definem as novas extremidades. O processo pára quando as extremidades se encontram, definindo uma curva de nível fechada, ou quando as duas extremidades alcançam as bordas da região de interesse.

O *método de segmentos* cria as curvas de nível em duas etapas. Na primeira etapa determinam-se todos os segmentos pertencentes a uma valor de cota predeterminado. Numa etapa seguinte conectam-se os segmentos a fim de se definir as curvas de nível referentes ao valor de cota preestabelecido.

Esses processos de geração de mapa de contornos são automáticos e requerem, apenas, a definição do modelo e dos valores de cotas das curvas a serem geradas.

### 3.4 Geração de Mapas de Declividade e Exposição

A declividade em uma posição da superfície é definida por um plano tangente àquela posição na superfície. A declividade é composta por duas componentes: o gradiente, as vezes também chamado de declividade, que é a máxima razão de variação de cota  $z$  e; a exposição que é a direção dessa máxima razão de variação de cota. Neste texto usar-se-á os termos declividade e exposição para essas componentes. A *declividade* pode ser expressa em graus ( $0^\circ$  a  $90^\circ$ ) ou em porcentagem enquanto que a *exposição* é expressa em graus ( $0^\circ$  a  $360^\circ$ ). As formulações gerais para o cálculo da declividade **D** e exposição **E** são dadas a seguir.

$$D = \arctg \{[(\delta Z/\delta X)^2 + (\delta Z/\delta Y)^2]^{1/2}\}$$

$$E = \arctg [-(\delta Z/\delta Y) / (\delta Z/\delta X)] \quad (-\pi < E < \pi)$$

Onde  $\delta Z/\delta X$  e  $\delta Z/\delta Y$ , derivadas parciais nas direções **X** e **Y**, são as componentes do vetor gradiente em uma dada posição.

Segundo Burrough, 1986, se a superfície está sendo representada por um modelo de grade regular retangular o melhor estimador das componentes do vetor gradiente, em uma posição  $i,j$  do modelo, é avaliado por:

$$[\delta Z/\delta X]_{i,j} = [(Z_{i+1,j+1} + 2*Z_{i+1,j} + Z_{i+1,j-1}) - (Z_{i-1,j+1} + 2*Z_{i-1,j} + Z_{i-1,j-1})]/8*\delta X$$

$$[\delta Z/\delta Y]_{i,j} = [(Z_{i+1,j+1} + 2*Z_{i,j+1} + Z_{i-1,j+1}) - (Z_{i+1,j-1} + 2*Z_{i,j-1} + Z_{i-1,j-1})]/8*\delta Y$$

onde os elementos  $Z$  estão distribuídos segundo uma vizinhança 8 como mostrado na figura 4.

$Z_{i-1,j+1}$	$Z_{i,j+1}$	$Z_{i+1,j+1}$
$Z_{i-1,j}$	$Z_{i,j}$	$Z_{i+1,j}$
$Z_{i-1,j-1}$	$Z_{i,j-1}$	$Z_{i+1,j-1}$

Figura 4: Distribuição dos elementos da grade segundo uma vizinhança 8.

Quando a superfície está representada por um modelo de grade triangular deve-se calcular as componentes  $\delta Z/\delta X$  e  $\delta Z/\delta Y$  a partir da superfície de ajuste utilizada para representar o comportamento do fenômeno dentro do triângulo que contém o ponto definido na posição  $i,j$ . Por exemplo, utilizando-se um ajuste linear para cada triângulo pode-se facilmente obter as derivadas parciais  $\delta Z/\delta X$  e  $\delta Z/\delta Y$  diretamente da equação do plano que passa pelos vértices do triângulo.

### 3.5 Fatiamento do Modelo

*Fatiar o modelo* consiste em definir intervalos, ou fatias, de cotas a fim de se gerar uma imagem temática a partir do modelo. Assim, cada tema, ou classe, da imagem temática é associado a um intervalo de cotas dentro dos valores atribuídos ao fenômeno modelado. O usuário é responsável pela definição das fatias e também da associação dessas fatias com classes predefinidas no sistema. As fatias são definidas de acordo com intervalos de cotas que são úteis para uma determinada aplicação. Quando um intervalo de cota não for associado a nenhuma classe deve-se atribuir o valor de nível de cinza 0 para os pixels da imagem que representam valores nesse intervalo.

A imagem temática gerada pelo fatiamento do modelo é frequentemente usada em análises espaciais como operações lógicas de intersecção e união.

### 3.6 Análise de Perfis

A partir de um modelo de grade regular ou irregular pode-se criar gráficos de perfis do fenômeno ao longo de uma trajetória. Um gráfico de perfil representa a variação do fenômeno estudado em função da distância planar percorrida numa trajetória predefinida. Os pontos do perfil são determinados pela intersecção da trajetória com as arestas do modelo digital de terreno. Num mesmo gráfico é possível traçar mais de 1 perfil para poder compará-los.

Este tipo de análise sobre o modelo é útil na determinação das melhores trajetórias para a construção de uma estrada, por exemplo. Pode-se estabelecer

mais de uma trajetória e analisar os respectivos perfis em termos de distancias percorridas, variação máxima de cota, inclinações máxima e mínima, etc...

No contexto de um SIG interativo pode-se utilizar, como “background” , qualquer tipo de dado armazenado na base de dados para apoiar a definição das possíveis trajetórias. A figura 5 ilustra a criação de 2 perfis a partir de 2 trajetórias.

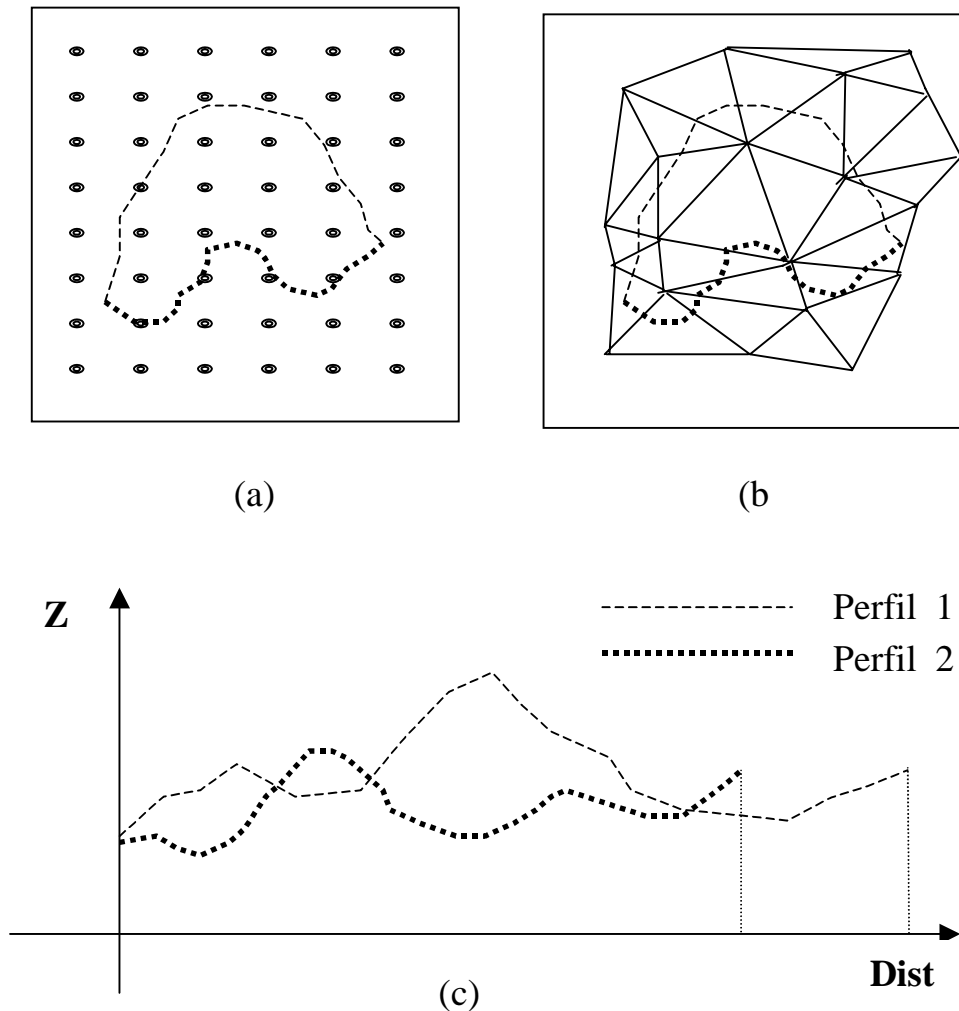


Figura 5: Utilização de modelo de grade (a) regular e (b) irregular para geração de gráfico de perfis (c)

### 3.7 Análise de Visibilidade

A análise de visibilidade compreende a criação de um mapa de áreas visíveis em relação à uma ou mais posições do terreno. Esta análise exige que o usuário forneça o modelo a ser usado e determine as posições no terreno. A partir desses dados o aplicativo é capaz de gerar perfis entre qualquer ponto do terreno e as posições predefinidas. Sobre cada perfil o aplicativo faz uma análise de visibilidade verificando se a linha que une os dois extremos do perfil corta alguma linha do perfil. Caso o perfil não seja cortado então o ponto do terreno é



visível em relação a essa posição. Caso contrário o ponto é marcado como não visível. A figura 6 ilustra a análise de visibilidade entre os extremos de um perfil.

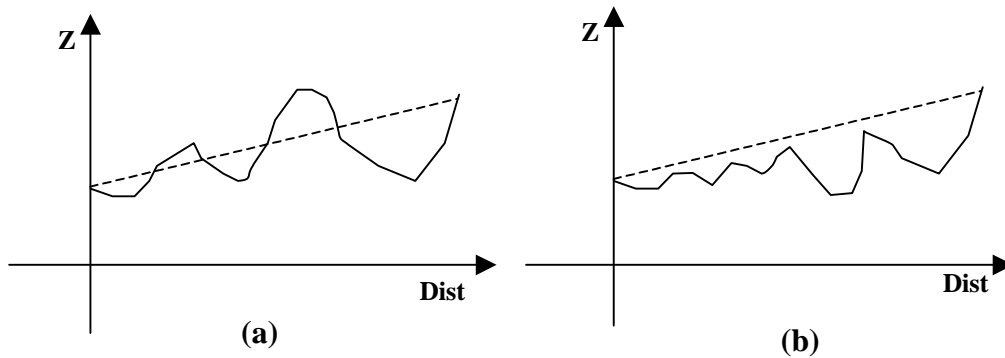


Figura 6: Análise de visibilidade entre extremos de um perfil: (a) extremos não visíveis e (b) extremos visíveis.

Esse tipo de análise tem aplicações interessantes na área de telecomunicações. Para fins de telefonia, por exemplo, pode-se delimitar e calcular áreas de visibilidade e estudar as áreas de influência e de superposição entre duas ou mais antenas de transmissão ou recepção.

Melhorias nesse tipo de aplicação devem incluir o fornecimento dos dados da altura e da potência de transmissão/recepção das antenas. A potência define um raio máximo de influência da antena. Pode-se, ainda, gerar relatórios com dados de áreas atendidas, áreas não atendidas e áreas de superposição.

O mapa de visibilidade é, normalmente, representado por uma imagem binária na qual os pontos não visíveis são codificados com valor 0 e os pontos visíveis são codificados com o valor máximo permitido pela imagem. A figura 7 em (b) o mapa de áreas visíveis, em branco, a partir do ponto marcado com + na imagem em níveis de cinza (a) de um modelo digital de terreno.

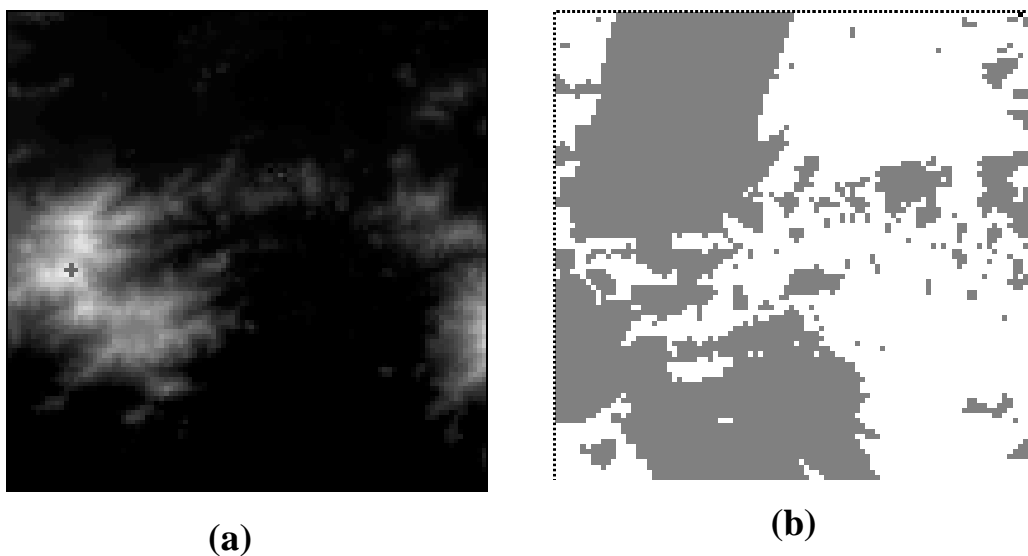


Figura 7: Ilustração da análise de visibilidade: (a) imagem em nível de cinza do modelo e (b) mapa de áreas visíveis.

### 3.8 Cálculo de Volumes

A partir de um modelo digital de terreno é possível se calcular volumes dentro de uma região do espaço predeterminada. Delimitando-se de uma área, dentro de uma região de interesse, e definindo-se um plano horizontal de corte  $Z = Z_b$ , onde  $Z_b$  é cota de referência ou cota base, é possível calcular-se o volume de corte e o volume de aterro referentes a esse plano base. Assim, os valores de cota acima da cota base contribuem para o volume de corte enquanto que os valores de cota abaixo da cota base contribuem para o volume de aterro. Pode-se calcular também uma cota ideal para o plano horizontal que igualaria os volumes de aterro e de corte. Esses cálculos são muito úteis para objetivos de estudos da terraplanagem de uma área. A figura 8 mostra o perfil de um terreno e as regiões que contribuem para os volumes de corte (+) e de aterro (-) segundo o plano base  $Z = Z_b$ .

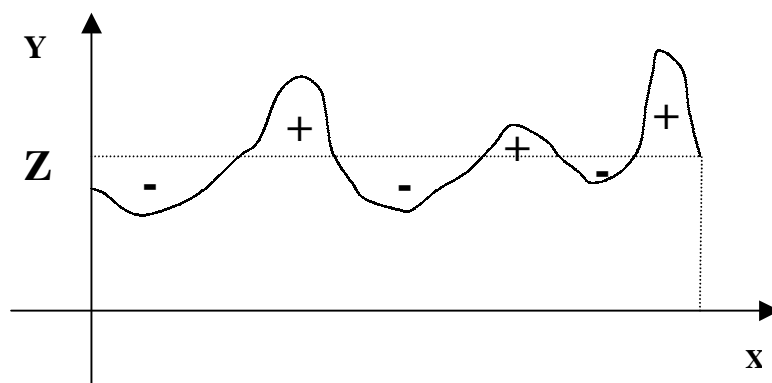


Figura 8: Perfil de um terreno ilustrando o volume de corte (+) e o volume de aterro (-) em relação um plano horizontal  $Z = Z_b$

Essa mesma aplicação pode ser usada para fins de cálculo do volume de água represado por uma barragem. O plano horizontal base e a região de interesse são definidos pela altura de enchimento da barragem. Neste caso o volume de água da barragem é igual ao volume de aterro calculado.

Uma aplicação mais completa de cálculo de volumes a partir do modelos digitais de terreno deve incluir também o uso de planos bases não horizontais.

### 3.9 Outras análises relevantes

Apesar de não serem tratadas em detalhe neste texto, é conveniente citar as seguintes análises que podem ser realizadas diretamente sobre um MDT:

- *Geração de relatórios estatísticos sobre os MDTs.* Esta análise compreende a criação de histogramas, apresentação de valores máximos, mínimos, média, mediana, moda, variância e desvio padrão relativos aos valores do MDT. Pode-se incluir, também, análises de variografia com o objetivo de estudar a variabilidade espacial do fenômeno estudado.

- *Criação de mapas de concavidade e convexidade.* Estes mapas podem ser derivados diretamente do mapa de declividade.
- *Análises relacionadas à hidrografia.* As mais relevantes são: delimitação automática de bacias, de redes de drenagem e de áreas inundadas e; geração de mapas de comprimento de rampa.

### 3.10 Análises multiníveis usando MDTs

Em *análises multiníveis*, o SIG integra dados de vários tipos a fim de solucionar aplicações em geoprocessamento. A seguir apresentam-se algumas considerações sobre o uso de modelos digitais de terreno em análises multiníveis.

- Como já apresentado na seção 3.2 é possível utilizar o MDT e imagens de sensoriamento remoto para se criar *projeções geométricas planares* com um alto grau de realismo. É possível, também, criar *animações* com vários MDTs projetados. Essas projeções são obtidas a partir de uma seqüência de diferentes ângulos de visada em relação a superfície.
- Os mapas fatiados, de declividade, de exposição e de comprimento de rampa, são muito úteis para obtenção de *mapas de apitado*, agrícola por exemplo, delimitação de áreas de riscos e estudos de erosão em uma determinada região.
- A determinação automática de áreas inundadas, integrada com outros tipos de dados manipulados pelo SIG, é importante na geração de relatórios de impacto ambientais de uma região de interesse.
- Os MDTs são usados com freqüência em procedimentos de correção geométrica e radiométrica de imagens de sensoriamento remoto. A ortoretificação de uma imagem é um exemplo de correção geométrica enquanto que o MDT é útil na diminuição do efeito de sombras sobre a radiometria de uma imagem.

## 4. Conclusões

Este trabalho descreveu as principais análises que podem ser realizadas sobre os modelos digitais de terreno representados no formato de grades. Apresentou-se também algumas análises multiníveis que utilizam os MDTs, propriamente dito, ou produtos derivados. Todas as análises referenciadas neste texto são passíveis de serem implementadas dentro do contexto de um sistema de informações geográficas. Este trabalho não teve a pretensão de esgotar o assunto de análises sobre modelos digitais de terreno. Outras aplicações são encontradas na literatura. A idéia principal foi fornecer ao leitor uma visão geral dessa área e salientar a importância desse tipo de manipulação no contexto de utilização de um sistema de informações geográficas para desenvolvimento de aplicações de geoprocessamento que exigem o uso de dados, ou produtos, de modelos digitais de terreno.

## Bibliografia

- Akima H. 1978a. A method of bivariate interpolation and smooth surface fitting for irregularly distributed data points. ACM Transactions on Mathematical Software, 4(2), pp 148 - 159.
- Burrough, P. A., 1986. Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment. Clarendon Press – Oxford – London.
- Donald H. and Baker M. P. 1986. Computer Graphics. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Falcidieno B. and Spagnuolo M. 1991. A new method for the characterization of topographic surfaces. International Journal of Geographical Information Systems, 5(4), pp. 397 - 412.
- Felgueiras C. A., 1987. "Desenvolvimento de um Sistema de Modelagem Digital de Terreno para Microcomputadores ". Dissertação de mestrado em Computação Aplicada. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, São José dos Campos, SP, Brasil.
- Felgueiras C. A. e Goodchild M. F., 1995. "Two Papers on Triangulated Surface Modeling". Relatório Técnico 95-2 do National Center for Geographic Information and Analysis - NCGIA. University of California, Santa Barbara, CA, U.S.A..
- Lancaster P. and Salkauskas k. 1986. Curve and Surface Fitting: An Introduction. Academic Press Inc. (London) LTD. London, England.
- McCullagh M. J. 1988. Terrain and surface modelling systems: theory and practice. Photogrammetric Record, 12(2), pp. 747-779.
- Pettinatti, F., 1983. "Modelamento Digital de Terreno e Representação Gráfica de Superfície. Dissertação de Mestrado em Engenharia". Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - USP. São Paulo, SP, Brasil.
- Petrie G. and Kennie, T. J. M. 1987. Terrain modelling in surveying and civil engineering. Computer Aided Design, 19(4), pp. 171-187
- Preparata F. P. and Shamos M. I. 1988. Computational geometry : an introduction . Corr. and expanded 2nd print. Springer-Verlag, New York, USA.
- Press W. H., Flawnery B. P., Teukolsky S. A. and Vetterling W. T. 1988. Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge, USA.